УДК 004.94
DOI 10.21685/2072-3059-2019-2-2

П. П. Макарычев, А. Ю. Афонин, С. В. Шибанов

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА НА ОСНОВЕ АВТОРЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Выявление и прогнозирование состояния технических средств, социально-экономических систем является актуальной задачей. Рассматривается метод построения моделей идентификации и прогнозирования на основе теоретических допущений регрессионного анализа и динамических систем. Отличительной особенностью методики является представление объекта в виде динамической системы с выделенной обратной связью, элементами нелинейности и запаздывания. Для оценки качества моделей использовались теоретические положения факторного и корреляционного анализа.

Результаты. Выполнено обоснование структуры и параметров моделей для решения задач идентификации и прогнозирования состояния технических объектов и социально-экономических систем.

Выводы. Предложенная авторегрессионная модель является эффективным инструментом при решении задач идентификации и прогнозирования поведения динамических объектов и социально-экономических систем.

Ключевые слова: авторегрессионная модель, множественная регрессия, авторегрессия, идентификация параметров, факторный и корреляционный анализ.

P. P. Makarychev, A. Yu. Afonin, S. V. Shibanov

OBJECT'S STATE PREDICTION ON THE BASIS OF THE AUTOREGRESSIVE MODEL

Abstract.

Background. Identification and forecasting of the state of technical means, social and economic systems is an urgent task. In the article the method of construction of models of identification and forecasting on the basis of theoretical assumptions of the regression analysis and dynamic systems is considered. A distinctive feature of the technique is the representation of the object in the form of a dynamic system with a dedicated feedback, elements of nonlinearity and delay. The concepts of factor and correlation analysis were used to assess the quality of the models.

Results. The substantiation of the structure and parameters of models for solving the problems of identification and forecasting the state of technical objects and socio-economic systems.

Conclusions. The proposed autoregressive model is an effective tool in solving the problems of identification and prediction of the behavior of dynamic objects and socio-economic systems.

Keywords: autoregressive model, multiple regression, autoregression, parameter identification, factor and correlation analysis.

Введение

Регрессионный анализ представляет собой классический статистический метод. Регрессионные методы успешно используются при решении задач прогнозирования состояний объектов и идентификации параметров моделей [1–4]. Регрессионные модели могут быть как линейными, так и нелинейными с любым числом входов и выходов. Однако эти модели, как правило, отражают функциональные зависимости только в системах без обратных связях (открытых системах). Для моделирования систем с обратными связями применяют «принцип Δt» [3, 5], который сводится к синтезу для исследуемого объекта некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего функционирование элементов сложной системы.

Регрессионный анализ своей целью имеет вывод, определение (идентификацию) уравнения регрессии, включая статистическую оценку его параметров. Уравнение регрессии позволяет найти значение выходной (зависимой) переменной, если известны величины независимых переменных. По числу факторов различают одно-, двух- и многофакторные уравнения регрессии. Аналогично случаю парной регрессии одна из важных задач спецификации модели множественной регрессии заключается в выборе функциональной зависимости. Экспериментальная основа построения множественной эмпирической регрессии – многомерная выборка. В случае линейной функциональной зависимости имеет вид

$$y_k = b_0 + b_1 x_k^1 + ... + b_m x_k^m + \varepsilon_n;\ k = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

где n – объем выборки (объем экспериментальных данных); m – число факторов; x_k^i – наблюдение i-й объясняющей переменной в момент времени $k\Delta t$; ε – случайная переменная (шум).

Выбор входных (объясняющих) переменных является основным моментом спецификации модели множественной регрессии. Если характер зависимости известен заранее и определен список объясняющих переменных, то задача спецификации модели состоит только в оценивании неизвестных параметров функциональной зависимости. В случае достаточного числа наблюдений независимых (объясняющих) переменных и отсутствия априорной модели используют различные эмпирические процедуры пошагового отбора факторов.

Авторегрессионный процесс порядка p в отсутствие входных переменных определяется следующим образом:

$$y_k = a_0 + a_1 y_{k-1} + ... + a_{k-p} y_{k-p} + \varepsilon_k, \tag{2}$$

где $a_0, a_1, ..., a_{k-p}$ – параметры модели авторегрессии (коэффициенты авторегрессии); ε_k – белый шум.

Простейшими примерами авторегрессии (2) являются модели процессов первого ($p = 1$) и второго ($p = 2$) порядков. Модель (2) служит полезной стохастической моделью описания временных рядов, которыми характеризуется система, осциллирующая под воздействием внутренних сил [6–11].

Цель и задачи. Предположим, что по результатам наблюдений в течение последовательности лет определено подмножество входных (независимых) показателей деятельности региона.

$$A_1 = \{PPL, PPLA, ZPL, PPO, OPF\},$$

где PPL – численность населения; $PPLA$ – численность экономически активного населения; ZPL – средняя оплата труда (руб.); PPO – прибыль организаций (млн руб.); OPF – стоимость основных фондов (млн руб.).

При этом подмножество выходных (зависимых) показателей деятельности региона в течение той же последовательности лет имеет вид

$$A_2 = \{PIN, FOT, POUT, OGS, VI, VT, INF, VRP\},$$

где PIN – денежные доходы населения (млн руб.); FOT – фонд оплаты труда (млн руб.); $POUT$ – покупка товаров и услуг (млн руб.); OGS – выпуск товаров и услуг (млн руб.); VI – объем промышленной продукции (млн руб.); VT – оборот торговли (млн руб.); VA – объем сельскохозяйственной продукции; INV – инвестиции в основной капитал (млн руб.); VRP – валовый региональный продукт (млн руб.).

Обобщенная схема динамической системы приведена на рис. 1.

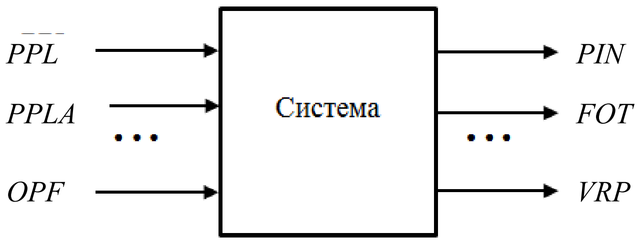

Рис. 1. Обобщенная структура системы

В соответствии с рис. 1 в базе данных должны храниться записи (кортежи данных). Запись кортежа (сущности) имеет вид

$$\langle \text{год}, PPL, PPLA, ZPL, \ldots, OPF, PIN, FOT, \ldots, VPR \rangle,$$

где год – год регистрации значений входных и выходного показателей.

Предположим, что аналитиком, осуществляющим регрессионный анализ, сделано предположение: показатель FOT функционально зависит от входных показателей $PPLA$, ZPL. Для дальнейшего изложения предлагаемого подхода к построению моделей установим соответствие между атрибутами кортежей и математическими переменными:

$$PPLA \to x_k^1,\ ZPL \to x_k^2,\ FOT \to y_k,\ k = 1, 2, \ldots, m,$$

где k – номер кортежа; m – общее количество кортежей или записей о наблюдениях за независимыми показателями $PPLA$, ZPL и зависимым показателем FOT.

Представим функциональную зависимость показателя FOT от показателей $PPLA$ и ZPL в виде концептуальной модели системной динамики (рис. 2).

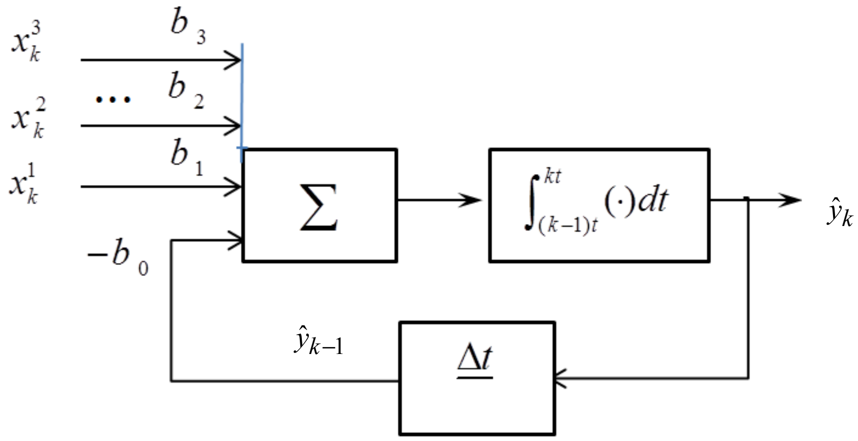

Рис. 2. Концептуальная модель системы

Концептуальная модель содержит следующие элементы. Сумматор входных сигналов x_k^j, $j=1,2,3$, где $k=1,2,...,m$ – сокращенная запись моментов времени $k\Delta t$, Δt – шаг дискретизации. Интегратор осуществляет интегрирование сигнала с выхода сумматора, например методом правых прямоугольников. Рассчитанный выходной сигнал $\hat{y}_k$ является выходным сигналом динамической системы. Сигнал $\hat{y}_{k-1}$ – выходной сигнал системы, задержанный на шаг дискретизации. Элемент обратной связи характеризуется коэффициентом передачи b_0 и задержкой на величину шага дискретизации Δt. Шаг дискретизации определяется интервалом времени между двумя записями о наблюдаемых переменных в хранилище данных.

Таким образом, обобщенная математическая модель анализируемой динамической системы имеет следующий вид:

$$\hat{y}_k = f(\hat{y}_{k-1}, x_k^1, x_k^2, x_k^3, \Delta t), \hat{y}_0 = y_0, k=1,2,...,m,$$

где $\hat{y}_0$ – выходной сигнал, наблюдаемый в момент времени $t_0 = 0$.

Отличительная особенность модели, представленной на рис. 2, состоит в том, что в системе выделен элемент обратной связи, а процесс интегрирования может осуществляться различными известными методами, включая методы прямоугольников, метод трапеций и др. [5].

Построение модели регрессионного анализа

На основе заданной структуры, элементов модельного представления динамической системы, с учетом интегрирования методом правых прямоугольников можно записать следующее конечно-разностное уравнение:

$$\hat{y}(k\Delta t) = -b_0\hat{y}((k-1)\Delta t) + b_1\Delta t \cdot x_1(k\Delta t) + ... + b_n\Delta t \cdot x_n(k\Delta t), \qquad (3)$$

где $k=1,2,...,m, j=1,2,...,n,\ \hat{y}_0 = y_0$.

Используя сокращенную запись моментов времени $k\Delta t = t_k$, выражение можно записать в более компактном виде:

$$\hat{y}_k = \left(-b_0\hat{y}_{k-1} + \sum\nolimits_{j=1}^{m} b_j x_k^j\right)\Delta t,\ \ k=1,2,...,m,\ \ j=1,2,...,n. \quad (4)$$

Учитывая возможность определения параметров модели (1), (2) методами регрессионного анализа, запишем (4) в виде

$$y_k = B_0 y_{k-1} + \sum\nolimits_{j=1}^{n} B_j x_k^j,\ \ k=1,2,...,m, \quad (5)$$

где $B_0 = b_0\Delta t,\ B_1 = b_1\Delta t,\ ...,\ B_n = b_n\Delta t$.

Из выражения (5) следует, что представление процесса *FOT*(*PPLA*, *ZPLA*) в виде авторегрессионной модели включает также элементы множественной нелинейной (билинейной) регрессии (рис. 3).

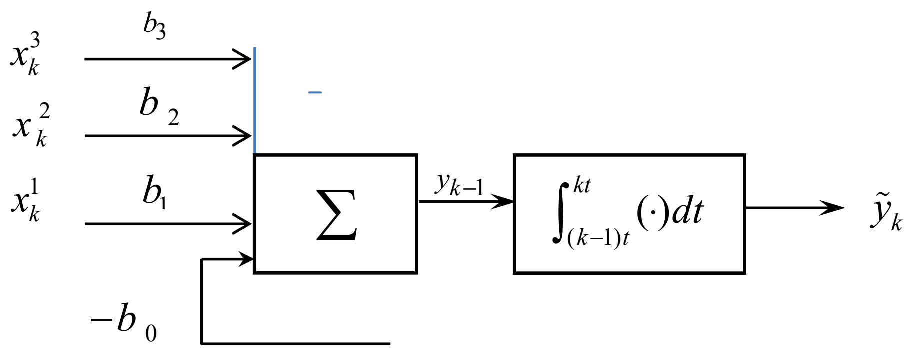

Рис. 3. Модель регрессионного анализа

Предположим, что в распоряжении аналитика имеется совокупность наблюдаемых входных и выходных показателей, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные

k	y_k	y_{k-1}	x_k^1	x_k^2	$x_k^3 = x_k^1 x_k^2$
0	$2{,}889 \cdot 10^4$	2,531	714,5	$5{,}207 \cdot 10^3$	$714{,}5 \cdot 5{,}207 \cdot 10^3$
1	$3{,}441 \cdot 10^4$	$2{,}889 \cdot 10^4$	711,2	$6{,}342 \cdot 10^3$	$711{,}2 \cdot 6{,}342 \cdot 10^3$
2	$4{,}589 \cdot 10^4$	$3{,}441 \cdot 10^4$	685,9	$8{,}566 \cdot 10^3$	$685{,}9 \cdot 8{,}566 \cdot 10^3$
…	…	…	…	…	…
$m-2$	$1{,}055 \cdot 10^5$	$9{,}8179 \cdot 10^4$	705,6	$2{,}064 \cdot 10^4$	$705{,}6 \cdot 2{,}064 \cdot 10^4$
$m-1$	$1{,}140 \cdot 10^5$	$1{,}055 \cdot 10^5$	711,0	$2{,}239 \cdot 10^4$	$711{,}0 \cdot 2{,}239 \cdot 10^4$
m	$1{,}193 \cdot 10^5$	$1{,}140 \cdot 10^5$	701,9	$2{,}319 \cdot 10^4$	$701{,}9 \cdot 2{,}319 \cdot 10^4$

Из табл. 1 видно, что у аналитика имеется $m+1$ наблюдение за выходным сигналом y_k и входными сигналами x_k^1, x_k^2 с шагом Δt. Для решения задачи регрессионного анализа определим следующие математические объекты. Вектор значений выходного сигнала:

$$\mathbf{Y}^T = \left[y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \cdots \quad y_{m-2} \quad y_{m-1} \quad y_m\right]. \quad (6)$$

Матрица значений наблюдаемых переменных y_{k-1}, x_k^1, x_k^2, x_k^3:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} y_0 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ y_1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ y_2 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m-3} & x_{m-2}^1 & x_{m-2}^2 & x_{m-2}^3 \\ y_{m-2} & x_{m-1}^1 & x_{m-1}^2 & x_{m-1}^3 \\ y_{m-1} & x_m^1 & x_m^2 & x_m^3 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

На основе выражений (6), (7) можно составить векторно-матричное уравнение вида

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{B}$ – вектор неизвестных параметров авторегрессии и множественной нелинейной регрессии. Используя операции транспонирования и нахождения обратной матрицы, преобразуем уравнение (8) к виду [4]:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \qquad (9)$$

В результате решения векторно-матричного уравнения (9) при значениях $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$, приведенных в табл. 1, получим

$$\mathbf{B}^T = \left[-1{,}7220 \cdot 10^{-2} \quad 4{,}0936 \quad 2{,}9581 \quad 2{,}9782 \cdot 10^{-3} \right].$$

Из последнего выражения следует, что коэффициент обратной связи в модели отрицательный и меньше единицы. Это обстоятельство подтверждает необходимость учета элемента обратной связи как в модели системной динамики, так и авторегрессионной модели. Следовательно, можно для расчета выходной (зависимой) переменной составить уравнение вида

$$\tilde{y}_k = B_0 X_{k,0} + B_1 X_{k,1} + B_2 X_{k,2} + B_3 X_{k,3}, \ k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (10)$$

На основе значений параметров регрессионной модели (10) можно также определить коэффициенты модели системной динамики [1, 2]. Для метода прямоугольников имеем:

$$b_0 = -B_0 / \Delta t; \ b_1 = B_1 / \Delta t; \ b_2 = B_2 / \Delta t; \ b_3 = B_3 / \Delta t.$$

Анализ качества моделей

Наблюдаемые y_k и рассчитанные значения выходного сигнала по модели регрессионного анализа $\tilde{y}_k$ и модели динамической системы $\hat{y}_k$ фонда оплаты труда приведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что значения $\tilde{y}$, $\hat{y}$, рассчитанные с использованием модели регрессионного анализа и модели динамической системы, практически совпадают. Графики относительных отклонений, рассчитанных значений переменной с использованием авторегрессионной модели $v_k = (\tilde{y}_k - y_k)/y_k$ и динамической модели $z_k = (\tilde{y}_k - y_k)/y_k$ приведены на рис. 4. Графики v_k, z_k с целью качественного воспроизведения разнесены на величину 0,005.

Таблица 2

Значения выходных параметров y, $\tilde{y}$, $\hat{y}$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Год	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
y (млн руб.)	6186	6673	7340	8279	9818	1055	1140	1192	1204.10^2
$\tilde{y}$ (млн руб.)	6156	6705	7364	8354	9806	1056	1147	1180	1228.10^2
$\hat{y}$ (млн руб.)	6157	6705	7364	8353	9805	1056	1147	1180	1228.10^2

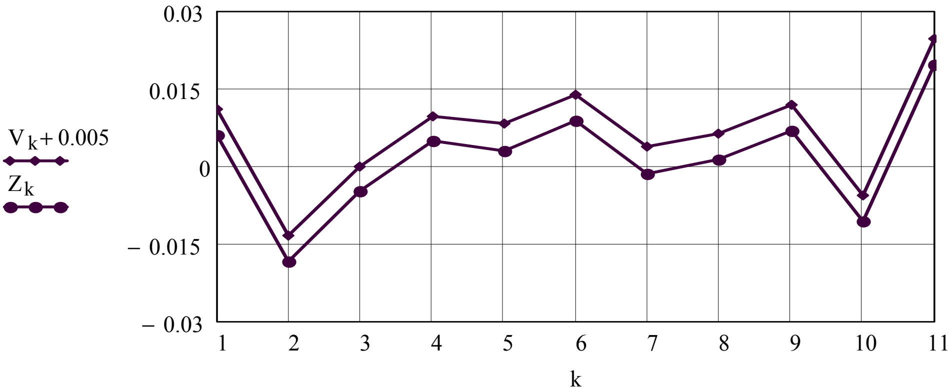

Рис. 4. Графики функциональной зависимости $\delta\tilde{y}_k$, $\delta\hat{y}_k$

Качество авторегрессионной модели оценивалось путем расчета коэффициентов парной регрессии $R_{y,x}, R_{x,x}$ с использованием формулы для расчета линейного коэффициента корреляции [8, 9]:

$$R(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{m}(y_i - \overline{y})^2}}, \qquad (11)$$

где $\overline{y}, \overline{x}$ – средние значения наблюдаемых выходной и входной переменных соответственно.

На основе рассчитанных линейных коэффициентов корреляции могут быть сформированы матрицы парных корреляций. Матрица корреляций между входными и выходной переменными имеет вид

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & R_{y,x_1} & R_{y,x_2} & R_{y,x_3} \\ R_{y,x_1} & 1 & R_{x_1,x_2} & R_{x_1,x_3} \\ R_{y,x_2} & R_{x_1,x_2} & 1 & R_{x_2,x_3} \\ R_{y,x_3} & R_{x_1,x_3} & R_{x_2,x_3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица корреляций между входными переменными имеет вид

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & R_{x_1,x_2} & R_{x_1,x_3} \\ R_{x_1,x_2} & 1 & R_{x_2,x_3} \\ R_{x_1,x_3} & R_{x_2,x_3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Расчет множественного коэффициента корреляции выходной переменной y_k с факторами x_k^1, x_k^2, x_k^3 выполнен по формуле

$$K_r = \sqrt{1 - |M_1| / |M_2|}\ .$$

Расчетное значение коэффициента корреляции $K_r = 0{,}99$, что подтверждает высокое качество рассмотренной выше авторегрессионной модели.

Оценка коэффициента детерминации осуществлена по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{m} (y_i - \overline{y})^2}, \qquad (12)$$

где m – число наблюдений; y_i – значение объясняемой переменной; $\overline{y}_i$ – среднее значение объясняемой переменной; $\tilde{y}_i$ – модельные значения, рассчитанные на основе оцененных параметров регрессионной модели (7).

Для авторегрессионной модели (5) расчетное значение коэффициента детерминации $R^2 = 0{,}99$.

Решение задачи прогнозирования

Для расчета прогнозируемых значений входных переменных $PPLA$, ZPL использована модель авторегрессионного анализа одного и того же вида. Структурная схема модели приведена на рис. 4. Модель содержит сумматор, интегратор, элемент задержки, элементы умножения (возведения в квадрат) и задания весовых коэффициентов.

В соответствии со схемой на рис. 5 расчетное значение входных переменных $PPLA$, ZPL определяется по формуле

$$\tilde{x}_k = b_0 + b_1 x_{k-1} + b_2 x_{k-2} + b_3 x_{k-1}^2 + b_4 x_{k-2}^2,\ k = 1, 2, ..., m\ .$$

Для средней оплаты труда ZPL постоянные коэффициенты авторегрессионной модели имеют следующие значения:

$$b_0 = 6{,}758 \cdot 10^3,\ b_1 = -3{,}555 \cdot 10^{-1},\ b_2 = 9{,}545 \cdot 10^{-1},$$

$$b_3 = 3{,}664 \cdot 10^{-5},\ b_4 = -3{,}094 \cdot 10^{-5}\ .$$

Наблюдаемые x_k^2 и расчетные значения $\tilde{x}_k^2$ приведены в табл. 3.

Наблюдаемые и расчетные значения $PPLA$ приведены в табл. 4.

Из табл. 3, 4 видно, что расчетные значения входных переменных $\tilde{x}_k^1$, $\tilde{x}_k^2$ имеют относительные отклонения $\pm 6\ \%$ вначале интервала наблюдения и

$\pm 2\,\%$ в конце этого интервала, которые допустимы для прогнозирования значения выходной переменной. На рис. 6 приведены графики относительной величины отклонений $\Delta Z_k = (\tilde{x}_k^1 - x_k^1)/x_k^1$ и $\Delta Y = (\tilde{x}_k^2 - x_k^2)/x_k^2$.

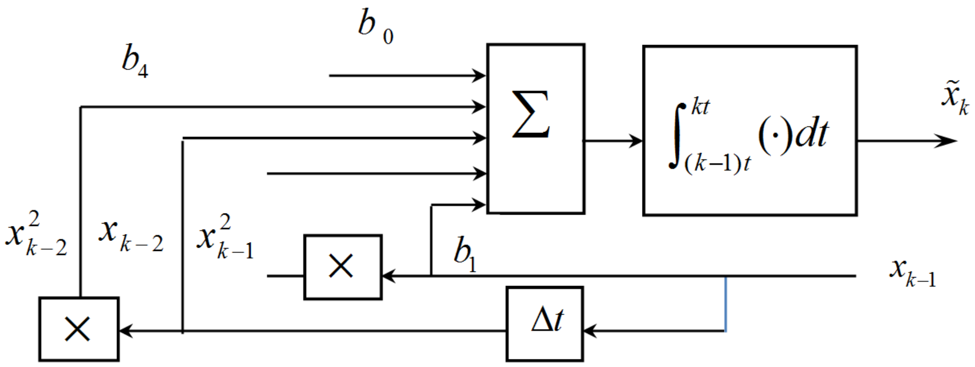

Рис. 5. Модель авторегрессионного анализа

Таблица 3

Наблюдаемые x_k^2 и рассчитанные значения $\tilde{x}_k^2$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k^2 (руб.)	11720	13030	14420	16360	19130	20640	22390	23190	25570
$\tilde{x}_k^2$ (руб.)	11210	13530	15290	16440	18080	20700	21970	23690	24080

Таблица 4

Наблюдаемые x_k^1 и рассчитанные значения $\tilde{x}_k^1$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k^1 (тыс. чел.)	709,3	688,8	682,8	689,1	702,8	705,6	711	701,9	708,6
$\tilde{x}_k^1$ (тыс. чел.)	698,0	697,6	701,5	690,3	697,7	703,3	704,2	699,3	706,5

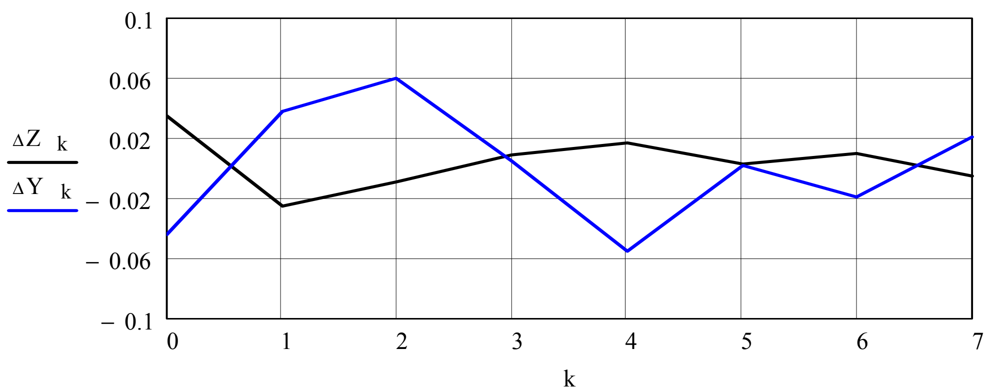

Рис. 6. Графики относительной величины отклонений δP и δL

Результаты и обсуждения

Анализ графиков на рис. 6 позволяет утверждать, что относительное отклонение значений x_k^1, x_k^2, рассчитанных с использованием предлагаемой модели авторегрессионного анализа, не превышает 6 %. В конце интервала наблюдения относительное отклонение значений не превышает 2 %.

Заключение

При разработке моделей регрессионного и авторегрессионного анализа использовано модельное представление о наблюдаемых функциональных зависимостях «вход-выход» с использованием концепций системной динамики. Это позволяет построить более качественные регрессионные и авторегрессионные модели, содержащие элементы как линейной и нелинейной множественной регрессии, так и авторегрессии. Для оценки качества модели использованы показатели, включая коэффициенты парной регрессии, множественной корреляции, индекса корреляции. Модельные представления регрессионного анализа и системной динамики могут взаимно дополнять друг друга. Например, разработке модели регрессионного анализа может предшествовать разработка модели системной динамики, отражающей функциональные зависимости между входными и выходными переменными процесса

Библиографический список

1. **Радченко, С. Г.** Основные концепции множественного регрессионного анализа / С. Г. Радченко // Математические машины и системы. – 2013. – № 1. – С. 150–155.
2. **Дилигенская, А. Н.** Идентификация объектов управления / А. Н. Дилигенская. – Самара : СамГТУ, 2009. – 136 с.
3. **Isermann, R.** Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications / Rolf Isermann, Marco Műnchhof. – Darmstadt, Germany : Springer, 2010. – 710 p.
4. **Суворов, Н. В.** Метод построения регрессионных моделей с динамическими структурными параметрами / Н. В. Суворов // Проблемы прогнозирования. – 2005. – № 4. – С. 143–155.
5. **Макарычев, П. П.** Моделирование многокомпонентных систем на основе маркированных графов / П. П. Макарычев, М. А. Волгина. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. – 156 с.
6. **Чокой, В. М.** Инструменты регрессионного анализа и прогнозирования процессов в авиационно-технических системах / В. М. Чокой // Crede Experto: транспорт, общество, образование, язык. – 2016. – № 4 (11). – С. 1–11.
7. **Краковский, Ю. М.** Алгоритм интервального прогнозирования динамических показателей на основе робастной вероятностной кластерной модели / Ю. М. Краковский, А. Н. Лузгин // Наука и образование. – 2016. – № 11. – С. 113–126.
8. A Simple Regression Model for Electrical Energy Forecasting / J. Kumaran @ Kumar, G. Ravi // International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering. – 2014. – Vol. 3, iss. 8. – P. 11331–11335.
9. **Bates D. M.** Nonlinear Regression Analysis and Its Applications / D. M. Bates, D. G. Watts. – New York : Wiley, 2007. – 392 p. [DjVu, ENG]
10. **Montgomery, D. C.** Introduction to Linear Regression Analysis / Douglas C. Montgomery, Elizabeth A. Peck, G. Geoffrey Vining. – 5th Edition. – New York : John Wiley & Sons, 2012. – 672 p.

11. **Mangan, N. M.** Model selection for dynamical systems via sparse regression and information criteria / N. M. Mangan, J. N. Kutz, S. L. Brunton, J. L. Proctor // Proceedings of the royal society a. Mathematical, physical and engineering sciences. – 2017. – № 8. – С. 1–16.

References

1. Radchenko S. G. *Matematicheskie mashiny i sistemy* [Mathematical machines and systems]. 2013, no. 1, pp. 150–155. [In Russian]
2. Diligenskaya A. N. *Identifikatsiya ob"ektov upravleniya* [Identification of controlled objects]. Samara: SamGTU, 2009, 136 p. [In Russian]
3. Isermann R., Műnchhof M. *Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications*. Darmstadt, Germany: Springer, 2010, 710 p.
4. Cuvorov N. V. *Problemy prognozirovaniya* [Forecasting problems]. 2005, no. 4, pp. 143–155. [In Russian]
5. Makarychev P. P., Volgina M. A. *Modelirovanie mnogokomponentnykh sistem na osnove markirovannykh grafov* [Multidimensional system simulation on the basis of marked graphs]. Penza: Izd-vo PGU, 2011, 156 p. [In Russian]
6. Chokoy V. M. *Crede Experto: transport, obshchestvo, obrazovanie, yazyk* [Crede experto: transport, society, education, language]. 2016, no. 4 (11), pp. 1–11. [In Russian]
7. Krakovskiy Yu. M., Luzgin A. N. *Nauka i obrazovanie* [Science and education]. 2016, no. 11, pp. 113–126. [In Russian]
8. J. Kumaran @ Kumar, Ravi G. *International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering*. 2014, vol. 3, iss. 8, pp. 11331–11335.
9. Bates D. M., Watts D. G. *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications*. New York: Wiley, 2007, 392 p. [DjVu, ENG]
10. Montgomery D. C., Peck E. A., G. Geoffrey Vining *Introduction to Linear Regression Analysis*. 5th Edition. New York: John Wiley & Sons, 2012, 672 p.
11. Mangan N. M., Kutz J. N., Brunton S. L., Proctor J. L. *Proceedings of the royal society a. Mathematical, physical and engineering sciences*. 2017, no. 8, pp. 1–16.

Макарычев Петр Петрович
доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математического обеспечения и применения ЭВМ, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: makpp@yandex.ru

Makarychev Petr Petrovich
Doctor of engineering sciences, professor, head of sub-department of software and computer application, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Афонин Александр Юрьевич
кандидат технических наук, доцент, кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: afonin@pnzgu.ru

Afonin Aleksandr Yur'evich
Candidate of engineering sciences, associate professor, sub-department of software and computer application, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Шибанов Сергей Владимирович
кандидат технических наук, доцент, кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Shibanov Sergey Vladimirovich
Candidate of engineering sciences, associate professor, sub-department of software and computer application, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: serega@pnzgu.ru

Образец цитирования:

Макарычев, П. П. Прогнозирование состояния объекта на основе авторегрессионной модели / П. П. Макарычев, А. Ю. Афонин, С. В. Шибанов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2019. – № 2 (50). – С. 11–22. – DOI 10.21685/2072-3059-2019-2-2.